На правах рукописи

Зубков Максим Витальевич

Вычислимые линейные порядки и η-представимость

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на *кафедре алгебры и математической логики государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина"*.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Арсланов Марат Мирзаевич,
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Добрица Вячеслав Порфирьевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Алаев Павел Евгеньевич.
Ведущая организация :	государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Новосибирский государственный университет".

Защита состоится «8» октября 2009 г. в 17.00 на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 при ГОУВПО "Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина" по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35., конференц-зал библиотеки им. Н. И. Лобачевского.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «____»____________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.24
к.ф.-м.н., доц. Еникеев А.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В представленной работе изучаются конструктивные или, другими словами, алгоритмические свойства линейных порядков и их типов. Исследование конструктивных свойств алгебраических структур началось в 50-ых годах XX века с работ А. И. Мальцева, М. Рабина и других математиков и с тех пор активно развивается.

Одно из направлений исследований конструктивных свойств линейных порядков было начато К. Джокушем. Он ввел степени типа изоморфизма структуры $\mathcal{A}$, как наименьшую из степеней, содержащих представление структуры $\mathcal{A}$. Применительно к линейным порядкам это определелние оказалось не очень полезным. Л. Рихтер[1] установила, что если $\mathcal{A}$ — порядковый тип, имеющий степень, то эта степень вычислима, и если $\mathcal{A}$ — подпорядок $\mathbb{Q}$, то существует такой подпорядок $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$, что нижняя грань степеней $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ есть $\mathbf{0}$. Техника доказательства этих утверждений может быть расширена на широкий класс структур. Л. Рихтер получила теоретико-структурный результат, который включает, как частный случай, результат о линейных порядках. Некоторые структуры могут иметь отличную от $\mathbf{0}$ степень, например, группы или решетки.[2]

Естественным является вопрос о существовании вычислимой структуры изоморфной данной. Эта проблема получила наибольшее развитие в исследованиях отечественных и зарубежных математиков, например, Л. Фейнера, С. С. Гончарова, К. Джокуша, Дж. Найт. Диссертационная работа лежит в русле этих исследований. Так как существует континуум попарно неизоморфных друг другу счетных линейных порядков, сложно надеяться на получение простого описания порядковых типов, имеющих вычислимые представ-

[1]Richter L. J. *Degrees of Unsolvability of Models.* – Ph. D. Thesis. – Urbana: University of Illinois at Urbana-Champaing. – 1997.

[2]Там же.

ления. Поэтому, как правило, рассматриваются типы линейных порядков с какими-либо дополнительными ограничениями. Так, характеризация вычислимо представимых вполне упорядоченных типов не представляет большой сложности. В самом деле, если $\mathcal{A}$ какое-либо вполне упорядоченное арифметическое подмножество $\mathbb{Q}$, тогда порядковый тип $\mathcal{A}$ есть вычислимый ординал, следовательно, вычислимо представим.[3]

Для другого естественного типа линейных порядков — дискретного линейного порядка, Р. Ватником[4] было показано, что $\zeta\rho$ имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда ρ имеет Π^0_2 представление (ясно, что любой дискретный линейный порядок представим в виде $\zeta\rho$, где ζ — тип естественного упорядочения целых чисел).

Доказательство этой теоремы предоставляет важный метод построения вычислимых представлений различных порядковых типов. Так М. Лерман[5], используя конструкцию, похожую на конструкцию в доказательстве теоремы Ватника, методом приоритета с бесконечными нарушениями на деревьях получил, что если A бесконечное Σ^0_3 множество, то существует вычислимый линейный порядок, имеющий порядковый тип:

$$\zeta + n_0 + \zeta + n_1 + \dots$$

где n_0, n_1, ... — перечисление A в порядке возрастания. (Здесь предполагается, что $0 \notin A$).

Линейный порядок такого типа называется сильным ζ-представлением множества A. Если перечисление множества A берется не обязательно в порядке возрастания и, возможно, с повторениями, то такой порядок называет-

[3]Rice H. G. *Recursive and recursively enumerable orders* // Trans. AMS. –1956. – V.83. – P.713–746. Rosenstein J. *Linear orderings.* – New York: Academic Press, 1982. – 487 P.

[4]Watnik R. *A generalization of Tennenbaum's Theorem on effectively finite recursive linear orderings* // J. Symbolic Logic. – 1966. – V.31. – P.159–168.

[5]Lerman M. *On recursive linear orderings* // Lecture Notes in Mathematics. – Berlin: Springer-Verlag. – 1981. – V.859. – P.132–142.

ся просто ζ-представимым. С помощью алгоритма Тарского-Куратовского и результата М. Лермана легко проверить, что множество A имеет вычислимое ζ-представление тогда и только тогда, когда оно имеет вычислимое сильное ζ-представление, тогда и только тогда, когда $A \in \Sigma^0_3$.

Дж. Розенштейном[6] были рассмотрены η-*схожие* линейные порядки. Линейный порядок называется η-схожим, если он не содержит бесконечных блоков (по определению, элементы лежат в одном блоке, если между ними не более конечного числа различных элементов). Дж. Розенштейн доказал, что если $\mathcal{L}$ вычислимый η-схожий линейный порядок, то существует такая Δ^0_3 функция $F : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$, что $\mathcal{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$. Используя технику, аналогичную доказательству теоремы Ватника, в частности, представление Π^0_2 множеств на деревьях, С. Феллнер[7] показал, что если F является Π^0_2-функцией, то линейный порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ имеет вычислимое представление. Аналогичный результат имеет место и для Σ^0_2-функций. Возникает естественный вопрос, можно ли эти результаты распространить на Δ^0_3-уровень арифметической иерархии? М. Лерман и Дж. Розенштейн[8] построили такую Δ^0_3-функцию, что порядок $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$ не имеет вычислимой копии. Более того, Р. Доуни[9] показал, что при этом функция F может иметь конечное число значений.

Эти результаты оставляют открытым следующий вопрос: если $\mathcal{L}$ — вычислимый η-схожий линейный порядок, то существует ли такая Π^0_2-функция $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, что $\mathcal{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$? Этот вопрос ставился в нескольких работах.[10]

Аналогично определению ζ-представимых и сильно ζ-представимых мно-

---

[6]Rosenstein J. *Linear orderings.* – New York: Academic Press, 1982. – 487 P.

[7]Fellner S. *Recursive and Finite Axiomatizability of Linear Orderings* // Ph.D. Thesis. – Rutgers Univsity. – 1976.

[8]Lerman M., Rosenstein J. G. *Recursive linear orderings* // Stud. Logic Found. Math. – 1982. – V.109. – P.132-142.

[9]Downey R. G. *Computability theory and linear orderings* // Handbook of computable algebra. – Amsterdam: Elsevier, 1998. – V.2. – P.823–976.

[10]Rosenstein J. *Linear orderings.* – New York: Academic Press, 1982. – 487 P.

жеств, можно определить η-представимые и сильно η-представимые множества, соответственно заменив в исходных определениях ζ на η — тип упорядочения рациональных чисел. Как видно из определения, η-представления являются η-схожими линейными порядками. Нетрудно доказать, что η-представимые множества (то есть множества, имеющие вычислимые η-представления) принадлежат Σ^0_3-уровню арифметической иерархии.[11] Дж. Розенштейн[12] и С. Феллнер[13], соответственно, показали, что любое Σ^0_2- или Π^0_2-множество является сильно η-представимым. С другой стороны, М. Лерман[14] построил Δ^0_3-множество, не имеющее вычислимого η-представления. Также М. Лерман дал полное описание η-представимых степеней. А именно, он доказал, что каждая Σ^0_3-степень η-представима. Дж. Розенштейн[15] показал, что любое сильно η-представимое множество лежит в классе Δ^0_3. Он, фактически, доказал, что каждое η-представимое по неубыванию множество лежит в классе Δ^0_3 (множество η-представимо по неубыванию, если оно имеет вычислимое η-представление, для некоторого неубывающего перечисления данного множества).

В связи с этими результатами Р. Доуни[16] поставил вопрос об описании сильно η-представимых степеней и, в частности, спросил, верно ли, что каж-

---

Lerman M., Rosenstein J. G. *Recursive linear orderings* // Stud. Logic Found. Math. – 1982. – V.109. – P.132–142.

Downey R. G. *Computability theory and linear orderings* // Handbook of computable algebra. – Amsterdam: Elsevier, 1998. – V.2. – P.823–976.

[11]Feiner L. J. *Hierarchies of Boolean algebras* // J. Symbolic Logic. – 1970. – V.35. – P.365–374.

[12]Rosenstein J. *Linear orderings.* – New York: Academic Press, 1982. – 487 P.

[13]Fellner S, *Recursive and Finite Axiomatizability of Linear Orderings* // Ph.D. Thesis. – Rutgers Univsity. – 1976.

[14]Lerman M. *On recursive linear orderings* // Lecture Notes in Mathematics. – Berlin: Springer-Verlag. – 1981. – V.859. – P.132–142.

[15]Rosenstein J. *Linear orderings.* – New York: Academic Press, 1982. – 487 P.

[16]Downey R. G. *Computability theory and linear orderings* // Handbook of computable algebra. – Amsterdam: Elsevier, 1998. – V.2. – P.823–976.

дая Δ_3^0-степень содержит сильно η-представимые множества? К. Харрис[17] построил такую Δ_3^0-степень, что она не содержит сильно η-представимых множеств, получив, таким образом, отрицательный ответ на второй вопрос.

Н. Хисамиевым[18], при исследовании конструктивизируемости абелевых групп специального вида, были введены предельно монотонные функции. В настоящее время они играют важную роль в изучении (с точки зрения теории вычислимости) различных структур, в том числе, линейных порядков.[19] К. Харрисом[20], была получена характеризация η-представимых с использованием предельно монотонных функций. Он доказал, что множество является η-представимым тогда и только тогда, когда оно является множеством значений некоторой $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции. Однако, пока не удалось получить подобного критерия для сильно η-представимых множеств. Так К. Харрис[21] построил пример сильно η-представимого множества, которое не является областью значений никакой возрастающей $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции определенной на ω. В работе А. Каца и Д. Турецкого[22] было предложено рассматривать функции, определенные на множестве рациональных чисел и возрастающие не на всей области определения, а на своем

[17] Harris K. *η-Represetation of Sets and Degrees* // J. Symbolic Logic – 2008. – V.73. – P.1097–1121.

[18] Хисамиев Н. Г. *Критерий конструктивизируемости прямой суммы циклических p-групп* // Изв. АН Каз. ССР., сер. физ.-мат. – 1981. – Т.98. – №1. – С.51–55.

[19] Csima B. F., Hirshfeldt D. R., Knight J. F., Soare R. I. *Bounding prime models* // J. Symbolic Logic. – 2004. – V.69. – № 4. – P.1117–1142.

Hirshfeldt D., Miller R., Podzorov S. *Order-computable sets* // Notre Dam J.Formal Logic.– 2007. – V.48. – №3. – P.317–347.

Khisamiev N. G. *Constructive abelian groups* // Handbook of computable algebra. – Amsterdam: Elsevier, 1998. – V.2. – P.1177–1231.

Khoussainov B., Nies A., Shore R. *Computable models of theories with few models* // Notre Dam J. Formal Logic. – 1997. – V.38. – №2. – P.165–178.

[20] Harris K. *η-Represetation of Sets and Degrees* // J. Symbolic Logic – 2008. – V.73. – P. 1097–1121.

[21] Там же.

[22] Kach A. M. and Turetsky D. *Limitwise Monotonic Functions, Sets and Degrees on Computable Domaine* // J. Symbolic Logic, принято к печати.

носителе. В нашей работе предложенные ими функции нашли применение при описании сильно η-представимых степеней.

Цель диссертационной работы. Исследование сильных η-представлений множеств и их связи с предельно монотонными функциями, а также описание уровней в релятивизованной иерархии Ершова, содержащих сильно η-представимые множества.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер, её результаты могут использоваться в дальнейших исследованиях по теории конструктивных моделей. Материалы диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов в университетах.

Основные результаты диссертации.

1. Получено описание сильно η-представимых тьюринговых степеней в терминах $\mathbf{0}'$-предельно монотонных функций.

2. Доказано, что каждое таблично сводящееся к $\mathbf{0}''$ множество (в частности, каждое множество из конечного уровня релятивизованной относительно $\mathbf{0}'$ иерархии Ершова) m-эквивалентно некоторому сильно η-представимому множеству.

3. Построены вычислимые структуры $\langle L, <_{\mathcal{L}}, S_{\mathcal{L}}\rangle$ и $\langle L, <_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{L}}\rangle$, содержащие неконструктивизируемые Π^0_1 начальные сегменты.

Апробация работы.

По результатам диссертации были сделаны доклады:

- на международной конференции "Мальцевские чтения 2005" (Новосибирск, 2005 г.);

- на международной конференции "Logic Colloquium 2006" (Неймеген, Нидерланды, 2006 г.);

- на международной конференции "Мальцевские чтения 2007" (Новосибирск, 2007 г.);

- на международной конференции "Logic Colloquium 2008" (Берн, Швейцария, 2008 г.);

- на научных семинарах и итоговых конференциях кафедры алгебры и математической логики Казанского государственного университета (Казань, 2005–2009 гг.).

- на совместных семинарах НГУ и ИМ СО РАН "Конструктивные модели", "Алгебра и Логика" (Новосибирск, 2009 г.)

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1]-[6]

Личный вклад автора. Основные результаты диссертации получены автором. Результаты, из совместной с А. Н. Фроловым работы [5], получены авторами в процессе нераздельного сотрудничества.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 83 страницах и состоит из списка обозначений, введения, трех глав, разделенных на параграфы, и списка литературы, содержащего 38 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, приведен обзор результатов исследований по ее тематике. Приведены необходимые определения и обозначения.

Глава 1 посвящена изучению предельно монотонных и псевдовозрастающих на $\mathbb{Q}$ функций и их связи с линейными порядками.

Определение 1.1.1. *Функция F называется X-предельно монотонной, если существует X-вычислимая функция $f(x, s)$ такая, что*

1) $(\forall x)(\forall s)[f(x, s) \leq f(x, s+1)]$*;*

2) $(\forall x)[F(x) = \lim_{s \to \infty} f(x, s)]$.

Определение 1.1.9. *Множество* $supp(F) = \{x \in \mathbb{Q} \mid F(x) > 1\}$ *называется носителем функции* $F : \mathbb{Q} \longrightarrow \omega$.

Определение 1.1.10. *Пусть* $\mathcal{L} = \langle L; <_{\mathcal{L}} \rangle$ *— линейный порядок и* $F : L \longrightarrow \omega$ *такая функция, что для любого* $n > 1$ *множество* $F^{-1}(n) = \{y \mid F(y) = n\}$ *конечно. Тогда функция F называется*

1) псевдовозрастающей на $\mathcal{L}$, если $(\forall x, y \in supp(F))[x <_{\mathcal{L}} y \Rightarrow F(x) < F(y)]$*;*

2) псевдонеубывающей на $\mathcal{L}$, если $(\forall x, y \in supp(F))[x <_{\mathcal{L}} y \Rightarrow F(x) \leq F(y)]$.

Первый параграф носит преимущественно технический характер. В частности, доказывается следующее предложение, которое упрощает построение псевдовозрастающих предельно монотонных функций с требуемыми свойствами.

Предложение 1.1.12. *Пусть* $f : \mathbb{Q} \times \omega \longrightarrow \omega$ *такая, что*

1) для любого $q \in \mathbb{Q}$ существует конечный предел $\lim\limits_{s\to\infty} f(q,\, s)$;

2) множество $\{\lim\limits_{s\to\infty} f(q,\, s) \mid q \in \mathbb{Q}\}$ бесконечно;

3) $\langle\{q \in \mathbb{Q} \mid \lim\limits_{s\to\infty} f(q,\, s) > 1\};\, <_{\mathbb{Q}}\rangle \cong \langle\omega;\, <\rangle$;

4) для любого $s \in \omega$ функция $f(\cdot,\, s)$ псевдовозрастающая (псевдонеубывающая) на $\mathbb{Q}$.

Тогда функция F, определяемая равенством $F(q) = \lim\limits_{s\to\infty} f(q,\, s)$, также псевдовозрастающая (псевдонеубывающая) на $\mathbb{Q}$.

Во втором параграфе изучается связь η-схожих линейных порядков и предельно монотонных функций. Центральной в этом параграфе является следующая теорема.

Теорема 1.2.2. *Пусть $\mathcal{L}$ есть η-схожий линейный порядок. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{L}$ имеет Δ^0_2-копию с Δ^0_2-отношениями соседства и блока;

2) $\mathcal{L}$ имеет Δ^0_2-копию с Δ^0_2-отношением блока;

3) $\mathcal{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$, здесь $F : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ и $epigr(F) \in \Pi^0_2$;

4) $\mathcal{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} F(q)$, здесь $F : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ и $F(q) = \liminf\limits_{s\to\infty} f(q,s)$ для любого $q \in \mathbb{Q}$ и некоторой вычислимой функции f;

5) $\mathcal{L}$ имеет вычислимую копию с Π^0_1-отношением блока.

Эта теорема позволяет получить несколько путей построения вычислимых η-схожих линейных порядков и, в частности, различных η-представлений, что будет широко использоваться во второй главе.

Глава 2 посвящена, в основном, исследованию сильно η-представимых множеств, определение которых приведено в первом параграфе указанной главы.

Определение 2.1.1. *Пусть $\{a_0,\, a_1,\, a_2 \ldots\}$ — перечисление, возможно с* *повторениями, множества $A \subseteq \omega$. Тогда порядок $\mathcal{L}$ типа*

$$\eta + a_0 + \eta + a_1 + \eta + a_2 + \eta + \dots$$

называется η-представлением множества A. Если $a_0 \le a_1 \le a_2 \dots$, то $\mathcal{L}$ называется η-представлением по неубыванию. Если же $a_0 < a_1 < a_2 \dots$, то $\mathcal{L}$ называется сильным η-представлением.

Множество A называется η-представимым (η-представимым по неубыванию, сильно η-представимым), если существует вычислимое η-представление (соответственно, η-представление по неубыванию, сильное η-представление) множества A.

Обобщаются приведенные ранее результаты Дж. Розенштейна и С. Феллнера о сильной η-представимости Σ^0_2- и Π^0_2-множеств, что является продвижением описания сильно η-представимых множеств и, следовательно, степеней в арифметической иерархии. Основным результатом первого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.1.3. *Пусть $A = B \cup C$ бесконечное множество, где $B \in \Sigma^0_2$ и $C \in \Pi^0_2$. Тогда A сильно η-представимо.*

Пусть $A = B \cup C$, где $B \in \Sigma^0_2$, $C \in \Pi^0_2$. Тогда $\overline{A} = \overline{C} \cap \overline{B} = \overline{C} - B$, то есть дополнение A можно представить в виде разности двух Σ^0_2-множеств.

Таким образом, имеет место следующее следствие.

Следствие 2.1.8. *Если $A = A_1 - A_2$, где $A_i \in \Sigma^0_2$, то существует сильно η-представимое множество $B \equiv_T A$.*

Во втором параграфе получено описание η-представимых по неубыванию степеней. А именно, доказана следующая теорема.

Теорема 2.2.1. *Пусть $A \in \Delta^0_3$. Тогда $A \oplus \omega$ множество η-представимое по неубыванию. Так как $A \oplus \omega \equiv_T A$, каждая Δ^0_3-степень содержит η-представимое по неубыванию множество.*

Учитывая результат К. Харриса[23] о существовании Δ^0_3-степени, не содержащей сильно η-представимых множеств, получаем, что существует η-представимое по неубыванию множество, не имеющее вычислимого сильного η-представления. Более того, оно не является T-эквивалентным ни какому сильно η-представимому множеству. Таким образом, как классы сильно η-представимых множеств и множеств η-представимых по неубыванию, так и классы соответствующих степеней, различны.

Другим результатом этого параграфа является описание сильно η-представимых степеней в терминах предельно монотонных псевдовозрастающих на $\mathbb{Q}$ функций, что является ответом на приведенный выше вопрос Р. Доуни. А именно, доказана следующая теорема.

Теорема 2.2.11. *Если A сильно η-представимое множество, то существует такая $\mathbf{0}'$-предельно монотонная псевдовозрастающая на $\mathbb{Q}$ функция H, что $rang(H) \equiv_T A$.*

Так как каждый ранг $\mathbf{0}'$-предельно монотонной псевдовозрастающей на $\mathbb{Q}$ функции является сильно η-представимым, то получаем, что тьюринговая степень η-представима тогда и только тогда, когда она содержит множество, являющееся рангом некоторой $\mathbf{0}'$-предельно монотонной псевдовозрастающей на $\mathbb{Q}$ функции.

В третьем параграфе продолжается изучение вопроса, частично затронутого в параграфе один, а именно, уровней в разностной иерархии степеней (релятивизованной относительно $\mathbf{0}'$) содержащих сильно η-представимые

[23] Harris K. *η-Represetation of Sets and Degrees* // J. Symbolic Logic – 2008. – V.73. – P. 1097–1121.

множества. В первом параграфе было установлено, что каждая степень, содержащая множество уровня 2, содержит сильно η-представимое множество. Однако это построение не удается продолжить естественным образом на более высокие уровни. Нами предложена новая конструкция, которая позволяет доказать следующую теорему, которая имеет важные следствия.

Теорема 2.3.7. *Пусть $h : \omega \times \omega \longrightarrow \{0, 1\}$ и $n : \omega \longrightarrow \omega$ такие X-вычислимые функции, что для любого x выполняется неравенство $|\{s \in \omega \mid h(x, s) \neq h(x, s+1)\}| \leq n(x)$.*

Тогда существует такая X-предельно монотонная псевдовозрастающая на $\mathbb{Q}$ функция F, что $rang(F) \equiv_T graph(H) \oplus graph(n)$, где функция H определяется равенством $H(x) = \lim\limits_{s\to\infty} h(x, s)$.

Если же n — вычислимая функция, то $rang(F) \equiv_m graph(H) \oplus graph(n)$.

Из этой теоремы выводятся следующие следствия.

Следствие 2.3.11. *Каждое таблично сводящееся к $\mathbf{0}''$ множество m-эквивалентно некоторому сильно η-представимому множеству.*

В частности, все степени из конечных уровней разностной иерархии Σ^0_2-множеств содержат сильно η-представимые множества.

Следствие 2.3.12. *Любая n-в.п. относительно $\mathbf{0}'$ m-степень содержит сильно η-представимое множество.*

Кроме того, результаты второй главы вместе с результатами К. Харриса показывают, что нет хорошего описания в арифметической иерархии ни сильно η-представимых множеств, ни их степеней.

В **главе 3** рассматриваются линейные порядки с добавленными предикатами — отношениями соседства и блока. Другими словами, такие структуры $\langle L;<_{\mathcal{L}},S_{\mathcal{L}}\rangle$ и $\langle L;<_{\mathcal{L}},F_{\mathcal{L}}\rangle$, где $\langle L;<_{\mathcal{L}}\rangle$ — линейный порядок. Начальный сегмент порядка $\mathcal{L}$ с индуцированным отношением соседства или отношением блока называется начальным сегментом структуры $\langle L;<_{\mathcal{L}},S_{\mathcal{L}}\rangle$ или $\langle L;<_{\mathcal{L}},F_{\mathcal{L}}\rangle$, соответственно. Таким образом, начальные сегменты этих структур имеют такую же сигнатуру. Сложность начального сегмента вычислимого линейного порядка может быть очень высокой. Например, согласно результатам Р. Ганди[24] и Дж. Харрисона[25], существует вычислимый линейный порядок с начальным сегментом, изоморфным ω_1^{CK} — наименьшему неконструктивному ординалу. М. Роу[26] показал, что если отношение соседства в вычислимом линейном порядке вычислимо, то любой Π^0_1 начальный сегмент имеет вычислимую копию. С другой стороны, им был построен вычислимый линейный порядок с Π^0_3 начальным сегментом, не имеющим вычислимой копии. Первый результат М. Роу был обобщен К. Амбос-Шписом, Б. Купером и С. Лемппом[27], которые доказали, что любой Σ^0_2 начальный сегмент вычислимого линейного порядка имеет вычислимую копию. Р. Доуни, Р. Коулз и Б. Хусаинов[28] построили вычислимый линейный порядок с Π^0_2 начальным сегментом, не имеющим вычислимой копии, тем самым получив полное описание начальных сегментов вычислимых линейных порядков, имеющих вычислимую копию.

В первом параграфе третьей главы построены вычислимые структуры $\langle L;<_{\mathcal{L}},S_{\mathcal{L}}\rangle$ и $\langle L;<_{\mathcal{L}},F_{\mathcal{L}}\rangle$, содержащие Π^0_1 неконструктивизируемые началь-

[24]Gandy R. O. *General recursive of finite type and hierarchies of functions* // Ann. Fac. Sci. Univ. Clemmont-Ferrand. – 1967. – V.35. – P.5-24.

[25]Harrison J. *Recursive pseudo-well orderings* // Trans. AMS. – 1968. – V.131.– P.526-543.

[26]Raw M. J. S. *Complexity of automorphisms of recursive lienar orders.* – Ph. D. Thesis. – University of Wisconsin-Madison. – 1995.

[27]Ambos-Spies K., Cooper S. B., Lempp S. *Initial segments of recursive linear orders* // Order. – 1997. – V.14. – P.101-105.

[28]Coles R. J., Downey R., Khoussainov B. *On initial segments of computable linear orders* // Order. – 1997/1998.– V.14. – P.107-124.

ные сегменты. С другой стороны, нетрудно показать, что каждый Σ^0_1 начальный сегмент $\langle L; <_{\mathcal{L}}, S_{\mathcal{L}}\rangle$ или $\langle L; <_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{L}}\rangle$ имеет вычислимую копию, то есть изоморфен некоторому вычислимому линейному порядку с вычислимым отношением соседства или блока, соответственно. Во втором параграфе получено более простое доказательство вышеупомянутого результата Доуни, Коулза и Хусаинова.

Такая постановка вопроса и формулировка результатов не предусматривают ограничений на тип ни самого линейного порядка, ни его начального сегмента, но, фактически, упомянутые начальные сегменты суть η-схожие линейные порядки. Более того, при несущественных дополнительных условиях они будут η-представлениями некоторых множеств (мы не будем на этом останавливаться). Естественно, что техника построения таких порядков близка к методам и подходам предыдущих глав, и здесь важную роль играют предельно-монотонные функции. В первом параграфе основными являются следующие теоремы.

Теорема 3.1.5. *Для любого непустого множества $M \in \Sigma^0_2$, не содержащего 0, существует такой вычислимый линейный порядок $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \omega^*$ с вычислимым предикатом $S_{\mathcal{L}}$, что $\mathcal{A}$ — η-схожий и $S(\mathcal{A}) = M$.*

Следствие 3.1.8. *Существуют вычислимая структура $\langle L; <_{\mathcal{L}}, S_{\mathcal{L}}\rangle$ и Π^0_1 начальный сегмент $\mathcal{I}$ данной структуры, что $\mathcal{I}$ не имеет вычислимой копии.*

Для предиката блока вместо предиката соседства аналог предыдущей теоремы не имеет места, однако аналог следствия остается верен. А именно доказана следующая теорема.

Теорема 3.1.9. *Существуют вычислимая структура $\langle L; <_{\mathcal{L}}, F_{\mathcal{L}}\rangle$ и Π^0_1 начальный сегмент $\mathcal{I}$ данной структуры такие, что $\mathcal{I}$ не имеет вычислимой* *копии.*

Во втором параграфе основной является следующая теорема.

Теорема 3.2.2. *Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{A} + \omega^*$ — $\mathbf{0}'$-вычислимый линейный порядок, с $\mathbf{0}'$-вычислимым предикатом соседства $S_{\mathcal{L}}$. Тогда существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}' = \mathcal{B} + \omega^*$ такой, что $S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{B})$. Здесь $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — η-схожие линейные порядки.*

Из этой теоремы легко следует упомянутый результат Доуни, Коулза и Хусаинова. Их доказательство использует метод приоритета с бесконечными нарушениями. Доказательство же нашей теоремы, как и необходимых теорем из первого параграфа третьей главы, используют только методы приоритета с конечными нарушениями. Кроме того, в качестве следствия она дает следующий результат.

Следствие 3.2.7. *Существует такой вычислимый порядок $\mathcal{L}$, что $\mathcal{L}/F_{\mathcal{L}} \cong \eta$, и никакая Δ^0_2-копия которого не имеет Δ^0_2-вычислимого отношения блока.*

В заключение, автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям Марату Мирзаевичу Арсланову и Андрею Николаевичу Фролову за постановку задач, внимательное отношение к исследованиям автора и поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Зубков М. В. *Сильно η-представимые множества* // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – 2006. – Т. 34. – С. 111–112.

[2] Zubkov M.V. *Strongly η-representable sets* // Bulletin of Symbolic Logic. – 2007. – V. 13. – P. 292–293.

[3] Zubkov M. *On eta-representable sets* // Bulletin of Symbolic Logic. – 2009. – V. 15. – P. 131.

[4] Зубков М. В. *Одна теорема о сильно η-представимых множествах* // Известия вузов. Математика. – 2009. – №7.– С. 77-81.

[5] Frolov A. N., Zubkov M. V. *Increasing η-representable degrees* // Mathematical Logic Quarterly. – 2009. – V. 55. – N. 6. – P. 561-564.

[6] Зубков М.В. *Начальные сегменты вычислимых линейных порядков с дополнительными вычислимыми предикатами* // Алгебра и логика, принято к печати.